BM-Grundlagen

Inhaltsverzeichnis

Sie können den Berufsmaturastoff auch im Buch von Jürgen Tietze: “Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik” repetieren:
Paragraph 1 **ohne:**

- 1.1.4 Verknüpf. von Aussagen und -formen
- 1.1.5 Implikation und Äquivalenz
- 1.2.1.4 Das Summenzeichen
- 1.2.1.5 Das Produktzeichen
- 1.2.1.6 Fakultät und Binomialkoeffizient
- 1.2.163 Bemerkung
- 1.2.164 Beispiel

Letzte Überarbeitung: Februar 2012

Der Berufsmatura-Stoff wird an der *Hochschule Luzern - Wirtschaft* vorausgesetzt. Die wichtigsten Inhalte werden im vorliegenden Papier repetiert.

Kontrollieren Sie Ihre Kenntnisse und Fertigkeiten indem Sie die mit dem Symbol

markierten Aufgaben lösen. (Kurzlösungen Seite 30, ausführliche Lösungen Seite 32)

BM.1 Mengen

BM.1.1 Zahlenmengensymbole

Wir verwenden die Symbole nach Tietze § 1.1.2

$\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen
= $\{1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{N}_0$ = Menge der natürlichen Zahlen mit Null
= $\{0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen
= $\{... ,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z}^+$ = Menge der positiven ganzen Zahlen = $\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}^-$ = Menge der negativen ganzen Zahlen
= $\{... ,-3, -2, -1\}$

$\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen
= $\left\{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$

$\mathbb{Q}^+$ = Menge der pos. rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}^-$ = Menge der neg. rationalen Zahlen

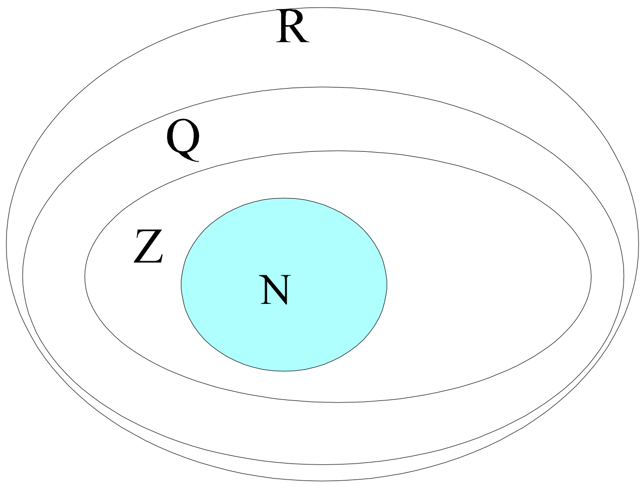
$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^+$ = Menge der pos. reellen Zahlen

$\mathbb{R}^-$ = Menge der neg. reellen Zahlen

$\mathbb{R}_0^+$ = Menge der pos.. reellen Zahlen mit Null

$\mathbb{R}_0^-$ = Menge der neg. reellen Zahlen mit Null



Aufgabe

Zu welchen Zahlenmengen gehören die folgenden Zahlen?

-3.5

8.111...

$\sqrt{3}$

999

$-\frac{1}{3}$

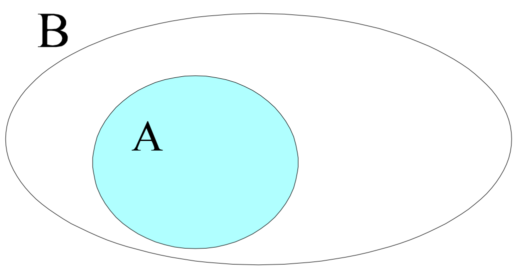
BM.1.2 Darstellung von Mengen

- Aufzählende Form $A=\{1,2,3,4\}$
- Beschreibende Form $A=\{x\in \mathbb{N} \mid x<5\}$
- Leere Menge $\phi=\{\}$

BM.1.3 Beziehungen zwischen Mengen

- Gleichheit $A = B$

- Teilmenge $A \subset B$



BM.1.4 Verknüpfung von Mengen

- Vereinigungsmenge zweier Mengen A,B:
  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\} = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

- Schnittmenge zweier Mengen A,B:
  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

- Differenzmenge zweier Mengen A,B:
  $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

- Ergänzungsmenge[1] von A bzgl U:
  $\overline{A} = \{x \in U | x \notin A\}$

- Produktmenge von A,B:
  $A \times B = \{(x,y) | x \in A \wedge y \in B\}$

Aufgabe

Veranschaulichen Sie die erwähnten Mengen graphisch (→Euler- oder Venn-Diagramm)

Aufgabe

Geg: $A=\{-3, 0, 5, 6\}$, $B=\{0, 6\}$, $U=\mathbb{Z}$

Ges: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $A \times B$

[1] Auch Komplementärmenge von A bzgl. U genannt, kurz Komplement von A

BM.2 Aussagen

Die Logik, die von der Form her Aussagen und Verknüpfungen von Aussagen als Ganzes unter dem Aspekt der Wahrheit und Falschheit untersucht, nennt man ***Aussagenlogik*** (formale Logik).

Definition

Kann von einem sprachlichen oder zeichensymbolischen Satz A bezüglich seines Inhaltes grundsätzlich entschieden werden, ob ***A entweder wahr oder falsch*** ist, so heisst A eine ***Aussage***. Ist A eine wahre Aussage, so sagt man, A habe den Wahrheitswert w; ist A eine falsche Aussage, hat A den Wahrheitswert f.

Beispiele

a) Spinnen sind Insekten. [f]
b) Der Saturn ist ein Satellit der Erde. [f]
c) Es ist falsch, dass 12 eine Primzahl ist. [w]
d) Kuba ist ein kommunistischer Staat oder jede natürliche Zahl ist Primzahl. [w]
e) Für alle nat.Zahlen a,b,c gilt: (a+b)+c=a+(b+c). [w]
f) Es gibt eine Zahl x mit $x^2 = 2$. [w]
g) Der Würfel hat 12 Kanten, 6 Seitenflächen und 9 Ecken. [f]

keine Aussagen sind hingegen:

h) Schliesse das Fenster!
i) Autofahrer sind rücksichtslos.

BM.3 Aussageformen

Ersetzt man in der Aussage “Die Zahl 5 ist eine ungerade Zahl” das Subjekt “Zahl 5" durch eine Variable, so entsteht eine sog. Aussageform: “x ist eine ungerade Zahl”. Setzt man für x “sinnvolle” Elemente ein, so entsteht eine wahre oder falsche Aussage.

Definition

Jeder sprachliche oder zeichensymbolische Ausdruck mit wenigstens einer Variablen heisst ***Aussageform***, wenn er durch jede "sinnvolle" Belegung der Variablen jeweils eine Aussage wird.

Bemerkungen

- Obige Definition enthält den Begriff "sinnvoll", der nicht präzisiert ist. Speziell nennen wir eine Belegung nicht sinnvoll, wenn ein mathematisch nicht definierter Ausdruck entsteht. So ist die Gleichung $\frac{8}{x} = 2$ eine Aussageform. Denn durch (fast) alle Belegungen von x mit Zahlen entsteht jeweils eine Aussage. Dagegen ist die Belegung von x durch 0 nicht sinnvoll, da der Ausdruck $\frac{8}{0}$ nicht definiert ist.

- Die Menge aller für die Belegung der Variablen der Aussageform sinnvollen Elemente fasst man in der ***Grundmenge G*** zusammen.

- Diejenigen **Elemente der Grundmenge G, die die Aussageform in wahre Aussagen überführen** nennt man ***Lösungen*** und werden in der ***Lösungsmenge*** $\mathfrak{L}$ zusammengefasst.
  Es gilt immer: $L \subset G$.

  Ist $L \neq \phi$, so heisst die Aussageform ***lösbar*** in G.
  Ist $L = \phi$, so heisst die Aussageform ***unlösbar*** in G.
  Ist $L = G$, so heisst die Aussageform ***allgemeingültig*** in G.

Beispiele von Aussageformen

a) x ist Teiler von y
b) ....ist ein schweizerischer Fluss,oder .... ist eine Stadt am Rhein
c) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
d) ....wohnt in ....
e) Wenn x durch 10 teilbar ist, dann ist x durch 2 teilbar
f) g steht senkrecht auf h
g) $(x\leq y) \wedge (x\in \mathbb{N}) \wedge (y \in \mathbb{N})$

keine Aussageformen sind:

h) Das Auto des Herrn x

i) 3x+7

k) Für alle x aus der Menge der natürlichen Zahlen gilt: x+3=3+x.
(Wahre Allaussage)

Aufgabe

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Aussageformen:

$G = \mathbb{N}$:

1. x ist Teiler von 4: L =

2. $x^2 = 5$: L =

3. Wenn x durch 10 teilbar ist, dann ist x durch 2 teilbar:
   L =

BM.4 Gleichungen

Definition

Werden zwei Terme mit mindestens einer Variable durch ein Gleichheitszeichen verbunden, so nennt man die entstandene Aussageform eine ***Gleichung***. Die Menge aller Elemente, die für die Einsetzung für die Variable(n) sinnvoll sind, fasst man in der ***Grundmenge*** **G** zusammen. Diejenigen **Elemente der Grundmenge, die die Gleichung in wahre Aussagen überführen**, fasst man in der ***Lösungsmenge*** L zusammen.

Symbolisch: $A(x)$: $T_1(x) = T_2(x)$

Beispiel $x^2+2x = -7x + x^3$

Beispiele

① $x+3 = 5$; $G=\mathbb{N}$; $L= \{2\}$

② $x^2 = 5$; $G=\mathbb{R}$; $L= \{\pm\sqrt{5}\}$

Definition

Sei $A(x)$ eine auf G definierte Gleichung mit der Variablen x und $L[A(x)]$ deren Lösungsmenge. Die Gleichung heisst

- ***lösbar in G*** $\Leftrightarrow L[A(x)] \neq \phi$
- ***unlösbar in G*** $\Leftrightarrow L[A(x)] = \phi$
- ***allgemeingültig in G*** $\Leftrightarrow L[A(x)] = G$.

Bemerkungen

- Enthält eine Gleichung zwei Variablen, so sind Grund- und Lösungsmenge Mengen aus Zahlenpaaren. Enthält eine Gleichung drei Variablen, so sind Grund- und Lösungsmenge Mengen aus Zahlentripeln, usw.

- Alle algebraischen Gesetze (sh. BM.4.1) sind **allgemeingültige Gleichungen** in der jeweils bezeichneten Grundmenge:

BM.4.1 Algebraische Gesetze

Die auftretenden Variablen a, b, c, ... sollen $\mathbb{R}$ als Grundmenge haben, wenn nichts Anderes vermerkt ist.

1. **Existenz von neutralen Elementen** bzgl. der Addition und Multiplikation:

   $0 + a = a + 0 = a$

   $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

2. **Existenz von inversen Elementen** bzgl. der Addition und der Multiplikation:

   $(-a) + a = a + (-a) = 0$

   $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \qquad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

3. **Kommutative Gesetze**:

   $a + b = b + a$

   $a \cdot b = b \cdot a$

4. **Assoziative Gesetze**:

   $(a + b) + c = a + (b + c)$

   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

5. **Distributives Gesetz**:

   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Aufgaben

a) $5xy(3a-2b) =$

b) $15ux - 12xw =$

6. **Kürzen bzw. Erweitern** von Brüchen:

$$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b} \qquad (b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Aufgabe

$$\frac{13 \cdot x(x-1)}{26x - 26} =$$

7. **Addition bzw. Subtraktion** von Brüchen:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad (b, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Aufgabe

$$\frac{y-1}{x+1} + \frac{y+1}{x-1} =$$

8. **Multiplikation von Brüchen**:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad (b, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Aufgabe

$$x \cdot \frac{y+1}{y-1} =$$

9. **Division von Brüchen (Doppelbruch)**:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad (b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Aufgabe

$$\frac{\frac{x+1}{b}}{\frac{x+1}{b^2}} =$$

10. **Binomische Formeln**:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Aufgaben

a) $(2x+3y)^2 =$

b) $4x^2 - 9y^2 =$

11. **Potenzgesetze** ($a, b \in \mathbb{R}^+$; $n, m \in \mathbb{R}$):

Def: $a^0 = 1$

P1: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

P2: $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

P3: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

P4: $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

P5: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Bem.: Für $n, m \in \mathbb{N}$ gelten die Potenzgesetze auch für negative Basen.

Aufgaben

a) $\dfrac{(a+b)^n \cdot (a-b)^{n+1}}{(a^2 - b^2)^n} =$

b) $\left(-2^3\right)^5 =$

c) $a^n \cdot b^m =$

d) $(a+b)^3 =$

12. **Wurzelgesetze**: $(a, b \in \mathbb{R}_0^+ \; ; n, m \in \mathbb{N})$

Def: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ Wurzel als Potenz

W1: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

W2: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

W3: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Definition:

$a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}$

Unter der ***n'ten Wurzel von a*** versteht man diejenige **nicht-negative Zahl**, deren n'te Potenz gleich a ergibt.

Bezeichnung: $\sqrt[n]{a}$

kurz: $x = \sqrt[n]{a} \;\Leftrightarrow\; x \geq 0 \;\wedge\; x^n = a$

Man bezeichnet a als ***Radikanden***
n als ***Wurzelexponenten***
x als ***Wurzelwert***.

Aufgaben

a) $\sqrt[3]{a^6 \cdot b^{12}} =$

b) $\frac{\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[5]{a+b}} =$

13. **Logarithmusgesetze**: ($u, v \in \mathbb{R}^+$, $a>0$ und $a \neq 1$)

L1: $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

L2: $\log_a (\frac{u}{v}) = \log_a u - \log_a v$

L3: $\log_a (u^k) = k \cdot \log_a u$

Definition:
$y>0$, $a>0$ und $a \neq 1$
Die Hochzahl x der Gleichung $y = a^x$ nennt man den ***Logarithmus von y zur Basis a*** und schreibt:

$$x = \log_a y$$

kurz: $x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x$

Aufgaben

a) $\log_{10} 1000 =$

b) $\log_a (a^3 b^6) =$

c) $3 \cdot \log_a u - 4 \cdot \log_a v =$

14. Betragsgesetze

B1: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

B2: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $\quad (b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

Definition $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Von den beiden Zahlen a, -a ist dann immer eine positiv. Die positive Zahl heisst ***Betrag von a***. Wir schreiben $|a|$. $|0|:=0$.

Aus der Definition folgt:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ falls } a \geq 0 \\ -a, \text{ falls } a<0 \end{cases}$$

Aufgaben

a) $|-5| =$

b) $|-a| =$

c) Sei $a > b$: $|b-a| =$

d) Gleichung $|x| = 4$

$L =$

15. Exponentialform einer Zahl

Sehr grosse oder sehr kleine Zahlen z werden in der ***Exponentialform*** geschrieben, d.h. in der Form

$\mathbf{z = a \cdot 10^{b}}$ mit $1 < a < 10$ und $b \in \mathbb{Z}$.

Beispiele

1) Entfernung Erde - Mond:
   384'400 km = $3.844 \cdot 10^{5}$ km
2) Rotes Blutkörperchen:
   7500 millionstel mm = $7.5 \cdot 10^{-3}$ mm

Aufgaben

Schreiben Sie in der Exponentialform:

1) Entfernung Erde - Sonne: 149'500'000 km =
2) Oberfläche der Erde: 510'100'000 km^{2} =
3) Lichtgeschwindigkeit: 299'800'000 m/s =
4) Masse der Erde: 5.974 Quadrillionen kg =

Die folgenden Grössen sind in millionstel mm angegeben. Geben Sie die Grössen in mm an:

5) Viren: 10 =
6) Kohlenstoffatom: 0.15 =
7) Grosser Atomkern: 0.000'01 =

BM.4.2 Äquivalenz von Gleichungen

Definition

Zwei Gleichungen ***A(x) und B(x) heissen äquivalent bzgl. G*** genau dann, wenn $L[A(x)] = L[B(x)]$ gilt. Wir schreiben $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

Beispiele

- $G=\mathbb{Z}$: $x + 7 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 6$

- $G=\mathbb{R}$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x - 1)(x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x = 1) \quad \vee \quad (x = 2)$$

Umformungen von Gleichungen, die auf äquivalente Aussageformen (Gleichungen) führen, nennt man ***Äquivalenzumformungen***.

Äquivalenzumformungen sind also Umformungen, die die Lösungsmenge nicht verändern!

Äquivalenzumformungen von Gleichungen spielen in der Mathematik eine zentrale Rolle.

BM.4.3 Äquivalenzumformungen

1. Äquivalenzumformung

Auf beiden Seiten einer Gleichung darf **dieselbe Zahl** (resp. derselbe Term) **addiert oder subtrahiert** werden.

Beachten Sie
Diese Regeln gelten nur beim Auflösen von Gleichungen, nicht aber bei Termumformungen.
Umgekehrt aber können Sie beim Lösen von Gleichungen die Termumformungsgesetze selbstverständlich verwenden.

$$T_1=T_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_1 \pm T_3 = T_2 \pm T_3$$

Beispiel $G = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
& 2x+3x^2+1 &=& \; 3x(x+1) \\
\Leftrightarrow \; & 2x+3x^2+1 &=& \; 3x^2+3x \\
\Leftrightarrow \; & 2x+1 &=& \; 3x \\
\Leftrightarrow \; & 1 &=& \; x \\
& L &=& \; \{1\}
\end{aligned}$$

2. Äquivalenzumformung

Beide Seiten einer Gleichung dürfen mit **derselben Zahl (≠0) multipliziert oder dividiert** werden.

$$T_1=T_2 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot T_1 = a \cdot T_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_1}{a} = \frac{T_2}{a} \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Aufgaben

- $5x+7 = \; -13x+1 \qquad G = \mathbb{R}$
- $\dfrac{x}{x-3} = \dfrac{5}{x-3} + 1 \qquad G = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- $x^2 - 4x = 0 \qquad G = \mathbb{R}$

Die Division durch einen Term ist keine Äquivalenzumformung (sondern eine "Verlustumformung"). Sie ist deshalb zu vermeiden...(Vgl. 3. Äquivalenzumformung)

3. Äquivalenzumformung

Ein Produkt zweier Terme ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist.

$$T_1 \cdot T_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_1 = 0 \quad \vee \quad T_2 = 0$$

Aufgaben

- $5x^3 - 13x^2 = 0$ $\qquad G = \mathbb{R}$
- $x(x-1)(x-2)(x+5)(x-\sqrt{2}) = 0$ $\qquad G = \mathbb{R}$
- $(x^2 - 9)(x^2 - 3x - 4) = 0$ $\qquad G = \mathbb{R}$

4. Äquivalenzumformung

$n \in \mathbb{N}$, n gerade, $a \geq 0$:

$$T^n = a \quad \Leftrightarrow \quad T = \sqrt[n]{a} \vee T = -\sqrt[n]{a}$$

$n \in \mathbb{N}$, n ungerade, $a \geq 0$:

$$T^n = a \quad \Leftrightarrow \quad T = \sqrt[n]{a}$$

$n \in \mathbb{N}$, n ungerade, $a < 0$:

$$T^n = a \quad \Leftrightarrow \quad T = -\sqrt[n]{-a}$$

Aufgaben

- $5x^4 = 80$ $\qquad G = \mathbb{R}$
- $(x-1)^3 = 3$ $\qquad G = \mathbb{R}$
- $(x-1)^5 = -12$ $\qquad G = \mathbb{R}$

5. Äquivalenzumformung: $T_1, T_2 > 0$, $a>0$ und $a \neq 1$

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow \log_a T_1 = \log_a T_2$$

Aufgaben

- $2^x = 3^{x-1}$ $\qquad G = \mathbb{R}$
- $1.05^x = 1.05^{x-1} + 2$ $\qquad G = \mathbb{R}$

Anwendung: Berechnungsformel für Logarithmen, Logarithmen auf dem Rechner

Mit dem Taschenrechner können Logarithmen zur **Basis 10** und zur Basis e (Euler‘sche Zahl) berechnet werden.

Statt $\log_{10} x$ schreibt man **log x** oder **lg x** :

Statt $\log_e x$ schreibt man **ln x** :

Wie wird nun aber $\log_a y$ für eine beliebige Basis a berechnet, zB. $\log_{1.04} 1.53971$? Erinnern wir uns an die Definition des Logarithmus:

$$x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x$$

Logarithmiert man beide Seiten der 2. Gleichung, so erhält man

$$\log y = x \cdot \log a$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \log_a y = \frac{\log y}{\log a}$$

Aufgabe

$\log_2 1000 =$

Bei Wurzelgleichungen mit geradem Wurzelexponent benötigt man noch die

6. Umformung (Vgl. 4. Äquivalenzumformung)

$$\boxed{T_1 = T_2 \Rightarrow (T_1)^n = (T_2)^n}$$

Das Potenzieren einer Gleichung mit einem geraden Exponenten eine “Gewinnumformung”. **Die Probe ist unerlässlich**.

Aufgaben

- $\sqrt{8-x} + 2 = x$ $\quad G=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 8\}$
- $\sqrt{5-x} = -2$ $\quad G=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$
- $4 - \sqrt[3]{(x-1)^2} = 0$ $\quad G=\mathbb{R}$

BM.4.4 Spezielle Gleichungen mit einer Variablen

a) Die lineare Gleichung

Definition $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Die Gleichung $ax + b = 0$ heisst ***lineare Gleichung*** mit einer Variablen.

Die lineare Gleichung hat in $G=\mathbb{R}$ genau eine Lösung, nämlich $x = -\frac{b}{a}$

Aufgaben

1. $15x - 23 = 18x - 26$
2. $a_1 b_2 x + b_1 c_2 = c_1 b_2 + a_2 b_1 x$

b) Die quadratische Gleichung

Definition $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Die Gleichung $ax^2+bx+c = 0$ heisst ***quadratische*** Gleichung (mit einer Variablen).

Für die Diskussion der Anzahl Lösungen der allgemeinen quadratischen Gleichung braucht man die

Definition

$\mathbf{D = b^2 - 4ac}$ heisst ***Diskriminante*** der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c = 0$.

und den **Satz**

Ist die **Diskriminante D** der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c = 0$ **positiv**, so besitzt die quadratische Gleichung in $G=\mathbb{R}$ die **beiden Lösungen**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ist **D=0**, so hat die quadratische Gleichung **die (einzige) Lösung** $x = -b/(2a)$

Ist **D<0**, so hat die quadratische Gleichung **keine Lösung**.

Aufgaben

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen[2]. Schränken Sie die Grundmenge G= $\mathbb{R}$ bei Bedarf geeignet ein.

1. $-4x^2 + 5x - 1 = 0$

2. $5x-(x-3)(2x-5) = 17$

3. $\dfrac{x}{2(x-4)} - \dfrac{3}{x+4} = \dfrac{2}{x-4}$

4. $\dfrac{x-a}{1-a} + \dfrac{1}{x} = 2$

[2]Für die quadratische Gleichung kann auch das TI84-Programm ***QUADGL*** verwendet werden.

BM.4.5 Gleichungssysteme

a) Mit zwei Variablen

Definitionen

Werden zwei Terme mit zwei Variablen durch ein Gleichheitszeichen verbunden, so nennt man die entstandene Aussageform eine ***Gleichung mit zwei Variablen***. Die Menge aller Zahlenpaare, die für die Einsetzung für die Variablen sinnvoll (d.h. wenn wahre oder falsche Aussagen entstehen) sind, fasst man in der ***Grundmenge* G** zusammen. Diejenigen **Zahlenpaare der Grundmenge, die die Gleichung in wahre Aussagen überführen**, fasst man in der ***Lösungsmenge*** L zusammen.
Unter einem Gleichungssystem mit 2 Variablen versteht man mehrere Gleichungen mit zwei Variablen, die durch "und" verbunden sind.

Im folgenden werden einige Methoden repetiert, welche gestatten, die Lösungsmenge eines Gleichungssystems auf der Basis von Rechnungen zu bestimmen. Wir wollen jetzt schon festhalten, dass es keine "beste" Methode gibt; im konkreten Fall besteht das ideale Vorgehen oft aus einer Kombination der nun folgenden Methoden.

Gleichsetzungsmethode:

Man löst beide Gleichungen nach derselben Variablen auf und setzt die gefundenen Terme gleich.

Aufgabe: $\wedge\begin{cases} 2x - 5y = 7 & (1) \\ 3x + 2y = 1 & (2) \end{cases}$ G= $\mathbb{R}^2$

$$x = \frac{7+5y}{2} \wedge x = \frac{1-2y}{3}$$

Wir setzen die beiden Terme gleich und erhalten so eine Gleichung mit nur einer Variablen:

$$\frac{7+5y}{2} = \frac{1-2y}{3} \Big| \cdot 6 \quad \Rightarrow y = -1$$

Den gefunden Wert für y setzen wir z.B. in die Gleichung (1') ein:

Bemerkungen

- Für $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ schreibt man kürzer $\mathbb{R}^2$
- Im Weiteren wollen wir G= $\mathbb{R}^2$ ohne Erwähnung annehmen.

$$(1') \quad x = \frac{7 + 5 \cdot (-1)}{2} = 1$$

Das Gleichungssystem hat eine Lösung, nämlich das Zahlenpaar (1,-1).
Als Lösungsmenge ergibt sich also L= {(1,-1)}

Einsetzungsmethode:

> Man löst nur eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt den gefundenen Term in die andere Gleichung ein.

Beispiel:

$$\wedge \begin{cases} 2x - 5y \quad = 7 & (1) \\ 3x + 2y \quad = 1 & (2) \end{cases}$$

Wir lösen jetzt z.B. die Gleichung (1) nach der Variablen x auf und erhalten:

$$(1') \quad x = \frac{7 + 5y}{2}$$

Nun wird der Ausdruck für x in Gleichung (2) eingesetzt:

$$3 \cdot \frac{7 + 5y}{2} + 2y = 1$$

$$\Rightarrow y = -1$$

Den gefundenen Wert für y setzen wir in Gleichung (1') ein und erhalten x = 1.

Als Lösungsmenge ergibt sich wieder L = {(1,-1)}.

Additionsmethode:

> Man multipliziert die beiden Seiten jeder Gleichung mit einer solchen Zahl, dass die Koeffizienten der einen Variablen entgegengesetzt gleich werden. Dann addiert man die beiden Gleichungen.

Beispiel

$$\wedge \begin{cases} 2x - 5y \quad = 7 & \Big| \quad \cdot 3 \\ 3x + 2y \quad = 1 & \Big| \quad \cdot (-2) \end{cases}$$

Man erhält die folgenden beiden Gleichungen:

$$\wedge \begin{cases} 6x - 15y & = 21 \\ -6x - 4y & = -2 \end{cases}$$

Addiert man diese, so erhält man eine Gleichung mit nur einer einzigen Variablen:

$$-19y = 19 \Leftrightarrow y = -1$$

Mit Hilfe der Additionsmethode liesse sich auch der Wert der Variablen x bestimmen. Dazu könnte man etwa die Gleichung (1) mit 2 und Gleichung (2) mit 5 multiplizieren. Meistens setzt man mit weniger Aufwand den gefundenen Wert, hier y = -1, in die eine der beiden Gleichungen (z.B. in (1)) ein:

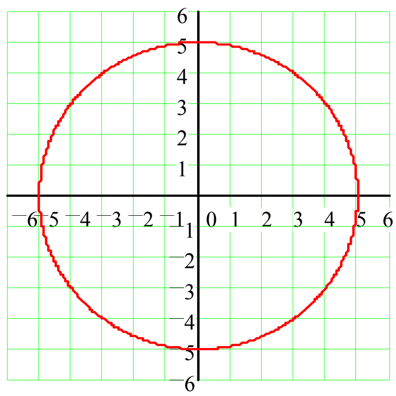
$$2x - 5 \cdot (-1) = 7 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

und damit L ={(1,-1)}.

Aufgaben

1. $\begin{vmatrix} y + 1 = 2x \\ -x + 2 = y \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 3x - xy = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{vmatrix}$



b) Gleichungssysteme mit 3 Variablen

Definitionen

Werden zwei Terme mit drei Variablen durch ein Gleichheitszeichen verbunden, so nennt man die entstandene Aussageform eine ***Gleichung mit drei Variablen***. Die Menge aller Zahlentripel, die für die Einsetzung für die Variablen sinnvoll (d.h. wenn wahre oder falsche Aussagen entstehen) sind, fasst man in der ***Grundmenge*** **G** zusammen. Diejenigen **Zahlentripel der Grundmenge, die die Gleichung in wahre Aussagen überführen**, fasst man in der ***Lösungsmenge*** L zusammen.
Unter einem Gleichungssystem mit 3 Variablen versteht man mehrere Gleichungen mit drei Variablen, die durch "und" verbunden sind.

Lösungsprinzip:

Mit Hilfe der Gleichsetzungs-, Einsetzungs- oder Additionsmethode führt man ein Gleichungssystem mit drei Variablen auf ein Gleichungssystem mit zwei Variablen zurück.

Beispiel

$$\left| \begin{array}{r} x+4y-5z=21 \\ 2x+3y+4z=-1 \\ x-6y-8z=-3 \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Die Menge $G=\{(x,y,z)|x,y,z\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^3$ ist die Grundmenge.

Lösung:

(1)-(3): $10y+3z=24$ **(4)**

2·(1)-(2): $5y-14z=43$ **(5)**

Die Gleichungen (4) und (5) bilden jetzt ein Gleichungssystem, das nur noch zwei Variablen enthält. Dieses System wird nach den bereits bekannten Methoden aufgelöst:

(4)-2·(5): $31z=-62 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{z=-2}$

Jetzt z=-2 z.B. in die Gleichung (4) einsetzen:

(4): $10y+3\cdot(-2)=24 \;\Leftrightarrow\; 10y=30 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{y = 3}$

Schlussendlich y=3 und z=-2 z.B. in die Gleichung (1) einsetzen:

(1): $x+4\cdot 3-5\cdot(-2)=21 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x = -1}$

Also: **L={ (-1,3,-2) } .**

Beachten Sie, dass die Elemente der Lösungsmenge (und auch der Grundmenge) ***Zahlentripel*** sind.

Aufgaben

Die Menge $G=\mathbb{R}^3$ ist wieder die Grundmenge.

1. $$\left|\begin{array}{rcl} 2x+5y-5z &=& 68 \\ x+y+z &=& 60 \\ x-3y+2z &=& -4 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

2. $$\left|\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 2 \\ 2x+y-3z &=& 1 \\ 8x+y-7z &=& 7 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

3. $$\left|\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 2 \\ 3x+y-2z &=& 5 \\ 4x-z &=& 6 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Bemerkung

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder genau eine oder keine oder unendlich viele Lösungen.

BM.5 Funktionen

Definitionen:

Eine ***Funktion*** f ist eine ***Zuordnung***, welche **jedem** Element x einer (Zahlen-)menge X **genau ein** Element y einer (Zahlen-)menge Y **zuordnet**.

X heisst ***Definitionsbereich*** (DB) der Funktion f.

Die Elemente von Y, welche zugeordnete Elemente sind, bilden den ***Wertebereich*** (WB) von f.

x heisst die ***unabhängige***, y die ***abhängige*** Variable bzw. x ***Argument*** und y ***Funktionswert***.

Symbolik/Schreibweise und Sprechweise:

$f: X \rightarrow Y, x \mapsto y$ oder kurz:

$y = f(x)$ 'y ist gleich f von x'

$y = f(x)$ nennt man die ***Funktionsgleichung*** der Funktion f.

Graph:

Da eine Funktion f eigentlich eine Menge von Paaren (x,y) ist, kann diese Menge in einem (rechtwinkligen) Koordinatensystem dargestellt werden.
Die Menge der Punkte P(x/y) heisst ***Graph der Funktion f***.

BM.5.1 Die konstante Funktion

Definition:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = c$ heisst ***konstante*** Funktion.

Die Funktionsgleichung lautet also $y=f(x)=c$

Wertebereich der konstanten Funktion: WB=$\{c\}$
Die Graphen der konstanten Funktionen sind Geraden parallel zur x-Achse.

Die Fixkostenfunktion ist eine konstante Funktion.

BM.5.2 Die lineare Funktion

Definition: Sei $a \neq 0$

> f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = a \cdot x + b$ heisst ***lineare*** Funktion.
>
> Die Funktionsgleichung lautet also $y = f(x) = a \cdot x + b$

Wertebereich der linearen Funktion: WB=$\mathbb{R}$ (DB=$\mathbb{R}$).

Der Graph der linearen Funktion ist eine **Gerade** mit ***Steigung a*** und ***y-Achsenabschnitt b***.

Beispiele: $f(x)=0.5x-1$
$g(x)=-x+2$
$h(x)=2x$

Aufgabe

Zeichen Sie die Graphen der obigen Beispiele.

Es gilt der wichtige Satz:

> Für die lineare Funktion
> f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$x \mapsto y = a \cdot x + b$ ist der Quotient
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a = \text{const.}$$
> Dabei ist $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$

Interpretation

Nimmt **x um Δx zu,** dann **nimmt y um a·Δx zu.**

oder speziell für $\Delta x = 1$:

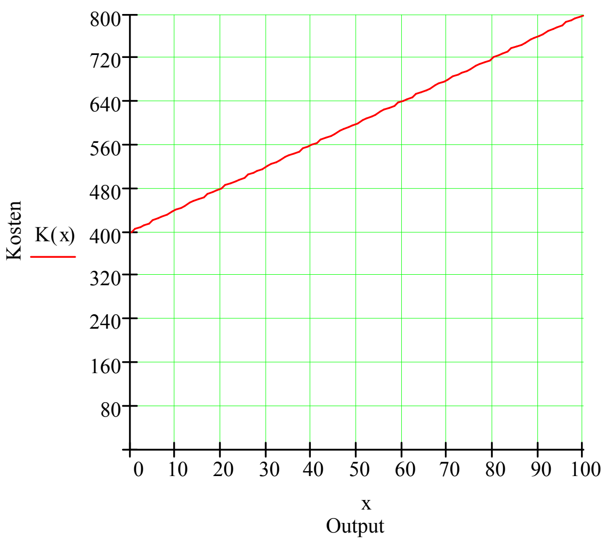
Nimmt **x um 1 zu,** dann **nimmt y um a zu.**

Wegen ihrer einfachen Struktur werden lineare Funktionen zur Beschreibung vieler ökonomischer Sachverhalte eingesetzt:

– Kostenfunktionen
– Konsumfunktionen
– Erlösfunktionen, usw.

Aufgabe

Der Graph einer Kostenfunktion K ist gegeben (sh. Abb.). Wie lautet die Funktionsgleichung von K? Interpretieren Sie die Steigung der Geraden.

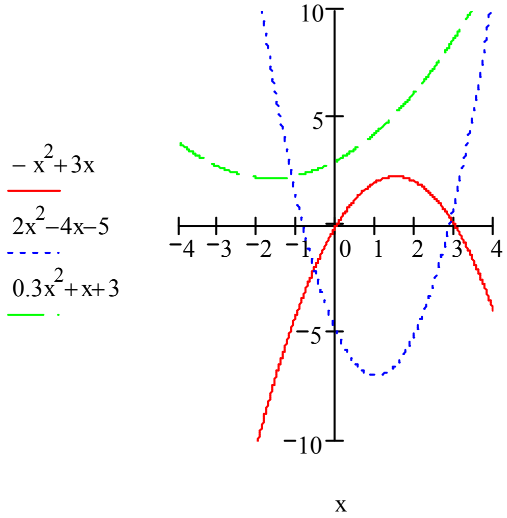


BM.5.3 Die quadratische Funktion

Definition: Sei $a \neq 0$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2+bx+c$ heisst
quadratische Funktion.
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ist die Funktionsgleichung.

Die Graphen der quadratischen Funktionen nennt man ***Parabeln***, die Zahl a deren ***Öffnungen***. Den tiefsten bzw. den höchsten Punkt einer Parabel nennt man ***Scheitel*** S.



Satz:

Der Graph der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2+bx+c$
ist eine Parabel mit Scheitelpunkt

$$S\left(-\frac{b}{2a} \,/\, c - \frac{b^2}{4a}\right) \qquad (a \neq 0)$$

Aufgabe

Der Gewinn G sei wie folgt von der Produktionsmenge x abhängig: $G(x) = -x^2 + 65x - 700$; $0 \leq x \leq 70$.

a) Bestimmen Sie die Nutzenschwelle und - grenze. *(Zwischen Nutzenschwelle und Nutzengrenze ist der Gewinn positiv. Nutzenschwelle: Diejenige Produktionsmenge x, für die der Gewinn zum ersten Mal Null wird. Nutzengrenze: Diejenige Produktionsmenge x, für die der Gewinn wieder Null und danach negativ wird.)*

b) Bei welcher Produktionsmenge ist der Gewinn maximal (gewinnmaximale Menge)?

c) Wie gross ist der maximale Gewinn?

d) Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion.

BM 6 Kurzlösungen der Aufgaben “BM-Grundlagen”

Seite 3: $-3.5 \in \mathbb{Q}^-$, $8.111... \in \mathbb{Q}^+$, $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ (sog. irrationale Zahl), $999 \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}^-$

Seite 4:
$$A \cup B = \{-3, 0, 5, 6\},\ A \cap B = \{0, 6\}$$
$$A \setminus B = \{-3, 5\},\ \overline{A} = \{\ldots, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 7, 8, \ldots\}$$
$$A \times B = \{(-3,0), (-3,6), \ldots, (6,6)\}$$

Seite 6: 1. L = {1, 2, 4} 2. L = {} 3. L = $\mathbb{N}$ (allgemeingültig)

Seite 8: a) 15axy - 10bxy b) 3x(5u-4w)

Seite 9: 6. $\frac{x}{2} = 0.5x$ 7. $\frac{2(xy+1)}{x^2-1}$ 8. $\frac{xy+x}{y-1}$ 9. b

Seite 10: 10 a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ 10 b) (2x+3y)(2x-3y)

11 a) a - b b) -32'768 c) $a^n \cdot b^m$ d) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Seite 11: a) a^2b^4 b) $\sqrt[15]{(a+b)^2}$

Seite 12: a) 3 b) $3 + 6 \cdot \log_a b$ c) $\log_a \frac{u^3}{v^4}$

Seite 13: a) 5 b) $|-a| = \begin{cases} a, & falls\ a \geq 0 \\ -a, & falls\ a < 0 \end{cases}$ c) a - b d) L = {4, -4}

Seite 14: 1) $1.495 \cdot 10^8$ km 4) $5.974 \cdot 10^{24}$ kg 5) 10^{-5} mm 7) 10^{-11} mm

Seite 16: L = { $-^1/_3$ } L = {} L = {0, 4}

Seite 17: 3. Äq. L = {0, 2.6} L = {0, 1, 2, -5, $\sqrt{2}$ } L = {-3, -1, 3, 4}

4. Äq. L = {2, -2 } L = { $1 + \sqrt[3]{3}$ } L = { $1 - \sqrt[5]{12}$ }

5. Äq. L = { 2.709...} L = { 76.01... }

Seite 18: L = { 4 } L = { } L = {-7, 9}

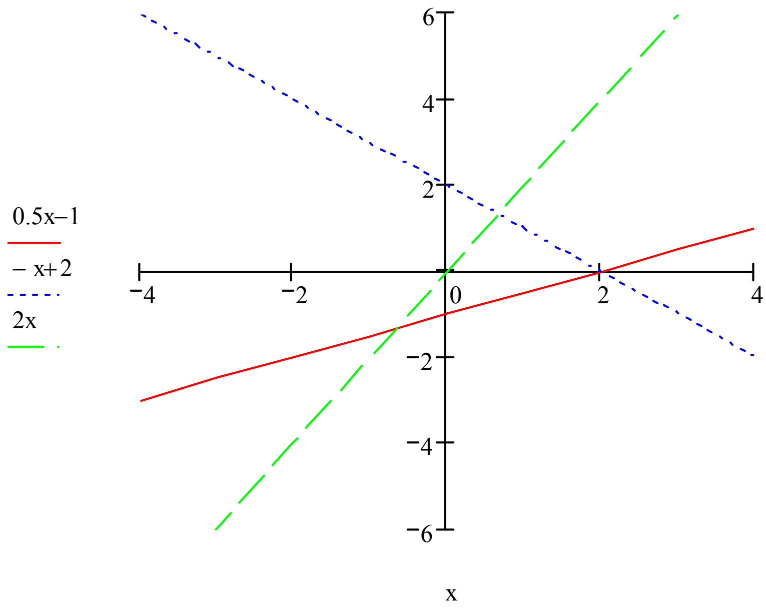
Seite 19: L = {1} L = { $\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ }

Seite 20: L = {$^1/_4$, 1} L = {4} L = {2} L = {1, 1-a}

Seite 23: L = {(1,1)} L = {(0,5), (0,-5), (4,3), (-4,3)}

Seite 25: 1. L = {(24,20,16)} 2. unendlich viele Lösungen 3. keine Lösung

Seite 27



Seite 28: K(x) = 4x + 400

Seite 29: a) x_s = 13.6 ME, x_g = 51.4 ME

b) x_{opt} = 32.5 ME

c) G_{max} = 356.25 GE

BM 6 Ausführliche Lösungen der Aufgaben “BM-Grundlagen”

Seite 8

a) $5xy(3a-2b) = 15axy - 10bxy$ (Distributivgesetz ausmultiplizieren)

b) $15ux - 12xw = 3x(5u-4w)$ (Distributivgesetz faktorisieren)

Seite 9

6. $$\frac{13\cdot x(x-1)}{26x-26} = \frac{13\cdot x(x-1)}{26(x-1)} = \frac{x}{2}$$

- $$\frac{y-1}{x+1} + \frac{y+1}{x-1} = \frac{(y-1)(x-1)+(y+1)(x+1)}{x^2-1} = \frac{xy-y-x+1+xy+y+x+1}{x^2-1} = \frac{2xy+2}{x^2-1}$$

- $$x\cdot\frac{y+1}{y-1} = \frac{x(y+1)}{y-1} = \frac{xy+x}{y-1}$$

- $$\frac{\frac{x+1}{b}}{\frac{x+1}{b^2}} = \frac{x+1}{b}\cdot\frac{b^2}{x+1} = \frac{(x+1)b^2}{b(x+1)} \underbrace{=}_{\text{kürzen}} b$$

Seite 10

10. a) $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $4x^2 - 9y^2 = (4x+3y)(4x-3y)$

11. a) $$\frac{(a+b)^n\cdot(a-b)^{n+1}}{(a^2-b^2)^n} = \frac{(a+b)^n\cdot(a-b)^n(a-b)}{\left((a+b)(a-b)\right)^n} = \frac{(a+b)^n\cdot(a-b)^n(a-b)}{(a+b)^n\cdot(a-b)^n} = a-b$$

b) $\left(-2^3\right)^5 = (-1)^5\cdot 2^{3\cdot 5} = -2^{15} = -32768$

c) $a^n \cdot b^m = a^n \cdot b^m$ (keine Umformung möglich)

d) $(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2) = \ldots = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Seite 11

---

a) $\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}} = (a^6\cdot b^{12})^{\frac{1}{3}} = a^{6\cdot\frac{1}{3}}\cdot b^{12\cdot\frac{1}{3}} = a^2b^4$ oder $\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}} = \sqrt[3]{(a^2b^4)^3} = a^2b^4$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[5]{a+b}} = \dfrac{(a+b)^{\frac{1}{3}}}{(a+b)^{\frac{1}{5}}} = (a+b)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} = (a+b)^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{(a+b)^2}$

Seite 12:

---

a) $\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$

b) $\log_a (a^3b^6) = \log_a a^3 + \log_a b^6 = 3 + 6\cdot\log_a b$

c) $3\cdot\log_a u - 4\cdot\log_a v = \log_a u^3 - \log_a v^4 = \log_a \dfrac{u^3}{v^4}$

Seite 16:

- $5x+7 = -13x+1 \Leftrightarrow 18x = -6 \Leftrightarrow x = -{}^1/_3$
- $\frac{x}{x-3} = \frac{5}{x-3} + 1$: keine Lösung L = {}
- $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x-4=0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Seite 17:

- $5x^3 - 13x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(5x - 13) = 0 \quad \Leftrightarrow x^2=0 \vee 5x-13=0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5/13 = 2.6$
- $x(x-1)(x-2)(x+5)(x-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee (x-1)=0 \vee (x-2)= 0 \vee (x+5)= 0 \vee (x-\sqrt{2})=0$
  $\Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \vee x=2 \vee x=-5 \vee x=\sqrt{2}$
- $(x^2 - 9)(x^2 - 3x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)(x-4)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=3 \vee x=4 \vee x=-1$
- $5x^4 = 80 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$
- $(x-1)^3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[3]{3}$
- $(x-1)^5 = -12 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = -\sqrt[5]{-(-12)} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[5]{12}$
- $$2^x = 3^{x-1} \Leftrightarrow x \cdot \log 2 = (x-1) \cdot \log 3 \Leftrightarrow x(\log 2 - \log 3) = -\log 3$$
  $$\Leftrightarrow x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2} = \frac{\log 3}{\log 1.5} = 2.7095112...$$
- $$1.05^x = 1.05^{x-1} + 2 \Leftrightarrow 1.05^x - 1.05^{x-1} = 2 \Leftrightarrow 1.05^x - \frac{1.05^x}{1.05} = 2$$
  $$1.05^x (1 - \frac{1}{1.05}) = 2 \Leftrightarrow 1.05^x (\frac{1.05 - 1}{1.05}) = 2 \Leftrightarrow 1.05^x = \frac{2.1}{0.05} = 42$$
  $$\Leftrightarrow x = \frac{\log 42}{\log 1.05} = 76.60703...$$

Seite 18

- $\sqrt{8 - x} + 2 = x$
  $x = -1$ erfüllt die Gleichung nicht: $L = \{ 4 \}$
- $\sqrt{5 - x} = -2$: Eine Wurzel ist nach Definition nie negativ, also keine Lösung
  $L = \{ \}$
- $$4 - \sqrt[3]{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \sqrt[3]{(x-1)^2} \Leftrightarrow 64 = (x-1)^2$$
  $$\Leftrightarrow x - 1 = \pm 8 \Leftrightarrow x = 9 \vee x = -7$$

Seite 19:

1. $15x - 23 = 18x - 26 \Leftrightarrow 3 = 3x \Leftrightarrow x = 1$

2. $a_1b_2x + b_1c_2 = c_1b_2 + a_2b_1x$

$a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - b_1c_2 \Leftrightarrow x(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1b_2 - b_1c_2$

Falls $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 : x = \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$

Seite 20:

1. $-4x^2 + 5x - 1 = 0 \quad x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-1)}}{2\cdot(-4)} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-8} = \left\langle \begin{array}{l} 0.25 \\ 1 \end{array} \right.$

2. 5x-(x-3)(2x-5) = 17

$\Leftrightarrow 5x - (2x^2 - 5x - 6x + 15) = 17 \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 16x + 32 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

3. $\dfrac{x}{2(x-4)} - \dfrac{3}{x+4} = \dfrac{2}{x-4} \Big| \cdot 2(x-4)(x+4) \qquad x \neq \pm 4$

$x(x+4) - 6(x-4) = 4(x+4) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 6x + 24 = 4x + 16$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$

Da x = 4 nicht zur Definitionsmenge gehört ist L = {2}

4. $\dfrac{x-a}{1-a} + \dfrac{1}{x} = 2 \Big| \cdot (1-a)\cdot x \qquad a \neq 1, x \neq 0$

$x(x-a) + (1-a) = 2\cdot(1-a)\cdot x \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 - a = 2x(1-a)$

$\Leftrightarrow x^2 - ax - 2x + 2ax + 1 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 + (a-2)x + 1 - a = 0$

Diskriminante $D = (a-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(1-a) = a^2 - 4a + 4 - 4 + 4a = a^2$

$$x_{1,2} = \frac{-(a-2) \pm a}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ 1-a \end{array} \right.$$